Soluție

1. a) Se arată că $B^3 = I_3$

b) $B^{-1} = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Obținem $(a+b+c)\cdot\det(A) = \frac{1}{2}\cdot(a+b+c)^2\cdot\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right) \geq 0$.

2. a) Se verifică prin calcul.

b) $\hat{0} = \hat{0}^2 + \hat{0}^2$, $\hat{1} = \hat{0}^2 + \hat{1}^2$, $\hat{2} = \hat{1}^2 + \hat{1}^2$, $\hat{3} = \hat{1}^2 + \hat{3}^2$, $\hat{4} = \hat{0}^2 + \hat{2}^2$, $\hat{5} = \hat{1}^2 + \hat{2}^2$, $\hat{6} = \hat{2}^2 + \hat{3}^2$.

c) Se arată inductiv că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\left\{ x^{2n} \,\middle|\, x \in \mathbb{Z}_7 \right\} = H$, de unde rezultă concluzia.